Resuelve

Página 237

¿Por qué las casillas centrales del aparato de Galton están más llenas que las extremas? Para explicarlo, sigamos el camino recorrido por un perdigón: en su trayectoria encuentra 7 bifurcaciones y, en cada una de ellas, tiene la misma probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)$ de ir hacia la izquierda o hacia la derecha.

- **Imita el recorrido de un perdigón lanzando una moneda 7 veces y haciendo la asignación CARA → derecha, CRUZ → izquierda. Por ejemplo, si obtienes:**

  C C C + C + C

  ¿cuál sería el itinerario correspondiente? Repite la experiencia y obtén otros recorridos distintos.

- **Intenta encontrar una ley que asocie el número de caras de la serie, cualquiera que sea el orden en que salen al lanzar la moneda, con el casillero en el que cae el perdigón.**

- **¿Se podría repetir la experiencia tirando 7 monedas simultáneamente y anotando solo el número de caras?**

  Intenta ahora explicar por qué hay más perdigones en las casillas centrales que en las extremas.

- Derecha, derecha, derecha, izquierda, derecha, izquierda, derecha.

- Si numeramos las casillas de la última fila del 1 al 8, contando de izquierda a derecha, tendríamos:

N.° DE CARAS	0	1	2	3	4	5	6	7
CASILLA	1	2	3	4	5	6	7	8

- Sí se podría, porque el lugar en el que cae el perdigón depende solo del número de caras y no del orden en el que aparecen las caras o las cruces, en el caso de que se lanzara una única moneda.

  En las casillas centrales hay más perdigones porque existen muchas más posibilidades de caer en ellas que en las de los extremos. Por ejemplo:

  Solo la secuencia + + + + + + + llevaría el perdigón a la primera casilla o solo la secuencia C C C C C C C lo llevaría a la octava casilla.

  Para ir a la segunda hay 7 posibilidades: C + + + + + + y las restantes seis en las que cambiamos de posición la cara dentro de la secuencia. El número de posibilidades es $\binom{7}{1} = 7$.

  Para caer en la cuarta, de los 7 lanzamientos, 3 serían cara. Luego el número de posibilidades es $\binom{7}{3} = 35$.

  Usando los números combinatorios se pueden estudiar los casos restantes de una manera análoga.

1 Cálculo de probabilidades

Página 240

1 Lanzamos dos monedas. Calcula:

a) P**[2 caras]** **b)** P**[2 cruces]** **c)** P**[1 cara y 1 cruz]**

Experimento compuesto independiente.

a) $P[\text{Cara y Cara}] = P[\text{Cara}] \cdot P[\text{Cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{Cruz y Cruz}] = P[\text{Cruz}] \cdot P[\text{Cruz}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

c) $P[\text{Cara y Cruz}] = P[1.^{\text{a}}\ \text{Cara}] \cdot P[2.^{\text{a}}\ \text{Cruz}] + P[1.^{\text{a}}\ \text{Cruz}] \cdot P[2.^{\text{a}}\ \text{Cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2 Lanzamos tres monedas. Calcula:

a) P**[C en 1.ª, + en 2.ª y C en 3.ª]** **b)** P**[dos C]**

Experimento compuesto independiente.

a) $P[1.^{\text{a}}\ \text{C}, 2.^{\text{a}}\ +, 3.^{\text{a}}\ \text{C}] = P[1.^{\text{a}}\ \text{C}] \cdot P[2.^{\text{a}}\ +] \cdot P[3.^{\text{a}}\ \text{C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Hay $\binom{3}{2} = 3$ formas de obtener dos caras y una cruz.

$P[\text{dos C}] = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

3 Lanzamos cuatro monedas. Calcula:

a) P**[tres C y una +]** **b)** P**[dos C y dos +]**

Experimento compuesto independiente.

a) Hay $\binom{4}{3} = 4$ formas de obtener tres caras y una cruz.

$P[\text{tres C y una } +] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) Hay $\binom{4}{2} = 6$ formas de obtener dos caras y dos cruces.

$P[\text{dos C y dos } +] = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

4 Lanzamos cuatro dados. Calcula:

a) P**[tres PAR y un 5]** **b)** P**[un 1, un 3, un 5 y un PAR]**

Experimento compuesto independiente.

a) Hay $\binom{4}{3}$ formas de obtener tres pares y un 5: $\binom{4}{3} = 4$

$P[\text{tres PAR y un 5}] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

b) Hay 4! formas de obtener un 1, un 3, un 5 y un PAR: $4! = 24$

$P[\text{un 1, un 3, un 5 y un PAR}] = 24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

Página 241

5 Extraemos tres naipes de una baraja de 40. Calcula:

a) P**[3 ASES]**

b) P**[un AS, un CABALLO y un REY]**

Experimento compuesto dependiente.

a) $P[3\text{ ASES}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

b) Hay 3! formas de obtener un AS, un CABALLO y un REY: 3! = 6

$P[\text{un AS, un CABALLO y un REY}] = 6 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{8}{1235}$

6 Extraemos tres bolas de la urna descrita arriba. Calcula:

a) P**[alguna de ellas sea la negra]**

b) P**[la negra y alguna roja]**

Experimento compuesto dependiente.

a) $P[\text{alguna de ellas sea la negra}] = 1 - P[\text{ninguna negra}] = 1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

b) Hay 9 formas de conseguir la negra y alguna roja:

	Probabilidad
NRR	$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
NRV	$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
NVR	$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$
RNR	$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
RNV	$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
RRN	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
RVN	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
VNR	$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$
VRN	$\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$P[\text{la negra y alguna roja}] = 9 \cdot \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

3 Distribuciones de probabilidad de variable discreta

Página 244

1 ¿Verdadero o falso?

Ninguna de las siguientes distribuciones de probabilidad está definida correctamente:

a)

x_i	a	b	c
p_i	0,3	0,4	0,2

Porque $\sum p_i \neq 1$.

b)

x_i	a	b	c	d
p_i	0,3	0,4	0,5	–0,2

Porque una de las probabilidades es negativa.

a) Verdadero. Las probabilidades en una distribución de probabilidad tienen que sumar 1.

b) Verdadero. Una probabilidad nunca puede ser negativa.

Página 245

2 Calcula la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente a la puntuación obtenida en el lanzamiento de un dado.

$\mu = \dfrac{7}{2}$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{91}{6} - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2} = 1,71$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	1/3	2/3
3	1/6	1/2	3/2
4	1/6	2/3	8/3
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	1	6
TOTAL	1	7/2	91/6

3 Si se tiran dos monedas, podemos obtener 0, 1 o 2 caras. Calcula la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente.

$\mu = 1$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{3}{2} - 1^2} = 0,71$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	1/4	0	0
1	1/2	1/2	1/2
2	1/4	1/2	1
TOTAL	1	1	3/2

4 En una bolsa tenemos un cierto número de bolas numeradas: 9 bolas con un *uno*, 5 con un *dos* y 6 con un *tres*. Sacamos una bola al azar y vemos qué número tiene.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcula la media y la desviación típica.

$\mu = \dfrac{37}{20} = 1,85$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{83}{20} - \left(\dfrac{37}{20}\right)^2} = 0,85$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	9/20	9/20	9/20
2	5/20	10/20	20/20
3	6/20	18/20	54/20
TOTAL	1	37/20	83/20

4 La distribución binomial

Página 247

1 ¿Qué valores puede tomar la variable x en cada distribución de los ejemplos 1, 2, 3, 5 y 7 anteriores?

1. x_i = n.º de caras.

   $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

2. x_i = n.º de cincos.

   $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

3. x_i = n.º de chinchetas con la punta hacia arriba.

   $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 100$

5. x_i = n.º de figuras.

   $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

7. x_i = n.º de tornillos defectuosos.

   $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 100$

2 Inventa experiencias parecidas a las de los ejemplos 4 y 6, pero que sí sean binomiales.

4. Extraemos una carta de una baraja, observamos si es o no un AS y la devolvemos al mazo. Barajamos y extraemos otra carta. Repetimos la experiencia cinco veces.

   $n = 5;\ p = 0{,}01 \ \rightarrow\ B(5;\ 0{,}01)$

6. Nos preguntamos en cuántos partidos elegirá campo el Betis al principio del partido en sus próximos diez encuentros.

   $n = 10;\ p = 0{,}5 \ \rightarrow\ B(10;\ 0{,}5)$

5 Cálculo de probabilidades en una distribución binomial

Página 249

Hazlo tú. En una binomial $B(12; 0{,}25)$, calcula $P[x = 0]$, $P[x \neq 0]$, $P[x = 3]$, así como los parámetros μ y σ.

$P[x = 0] = 0{,}75^{12} = 0{,}032$

$P[x \neq 0] = 1 - P[x = 0] = 0{,}968$

$P[x = 3] = \binom{12}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^9 = 220 \cdot 0{,}016 \cdot 0{,}075 = 0{,}264$

Hazlo tú. Resolver el mismo problema suponiendo que solo el 2 % de las bombillas son defectuosas.

$n = 100 \quad p = 0{,}002 \quad q = 0{,}998$

a) P [ninguna defectuosa] $= P[x = 0] = \binom{100}{0} \cdot 0{,}002^0 \cdot 0{,}998^{100} = 0{,}819$

b) P [alguna defectuosa] $= 1 - P[x = 0] = 0{,}181$

c) P [dos defectuosas] $= \binom{100}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}998^{98} = 0{,}016$

1 En una distribución binomial $B(10; 0{,}4)$, halla $P[x = 0]$, $P[x = 3]$, $P[x = 5]$, $P[x = 10]$.

Calcula el valor de cada uno de los parámetros μ y σ.

$P[x = 0] = 0{,}6^{10} = 0{,}006047$

$P[x = 3] = \binom{10}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 120 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}215$

$P[x = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 252 \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}201$

$P[x = 10] = 0{,}4^{10} = 0{,}000105$

$\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{2{,}4} = 1{,}55$

2 Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras.

Halla los valores de μ y σ.

Se trata de una distribución binomial con $n = 7$ y $p = 0{,}5 \rightarrow B(7; 0{,}5)$

$P[x = 3] = \binom{7}{3} \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^4 = 35 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}0625 \approx 0{,}273$

$P[x = 5] = \binom{7}{5} \cdot (0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^2 = 21 \cdot 0{,}03125 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}164$

$P[x = 6] = \binom{7}{6} \cdot (0{,}5)^6 \cdot (0{,}5) = 7 \cdot 0{,}015625 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}0547$

$\mu = n \cdot p = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 1{,}323$

6 Ajuste de un conjunto de datos a una distribución binomial

Página 251

1 **Un profesor de idiomas tiene una clase con cuatro alumnos adultos. De los 100 días de clase, asisten 4, 3, 2, 1 o ninguno de ellos, según la tabla adjunta. Ajusta los datos a una distribución binomial y di si te parece que el ajuste es bueno o no.**

x_i	4	3	2	1	0
f_i	23	48	17	9	3

La media es $\bar{x} = 2,79$.

Como $n = 4$, $\bar{x} = np \to 2,79 = 4p \to p = 0,6975$

Si fuera una binomial, $p = 0,6975$ sería la probabilidad de que uno cualquiera de los alumnos asistiera un día a clase. $q = 0,3025$.

Con este valor de p se obtiene la siguiente tabla:

x_i	$p_i = P[x = x_i]$	$100 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	|DIFERENCIAS|
0	$q^4 = 0,008$	0,8	1	3	2
1	$4\,p\,q^3 = 0,077$	7,7	8	9	1
2	$6\,p^2\,q^2 = 0,267$	26,7	27	17	10
3	$4\,p^3\,q = 0,411$	41,1	41	48	7
4	$p^4 = 0,237$	23,7	24	23	1

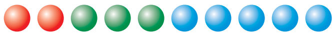
La mayor de las diferencias es 10. Es demasiado grande en comparación con el total, 100. Hemos de rechazar la hipótesis de que se trata de una binomial.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 252

1. Cálculo de probabilidades compuestas

Hazlo tú. Realiza la misma actividad suponiendo que en la urna hay estas bolas:



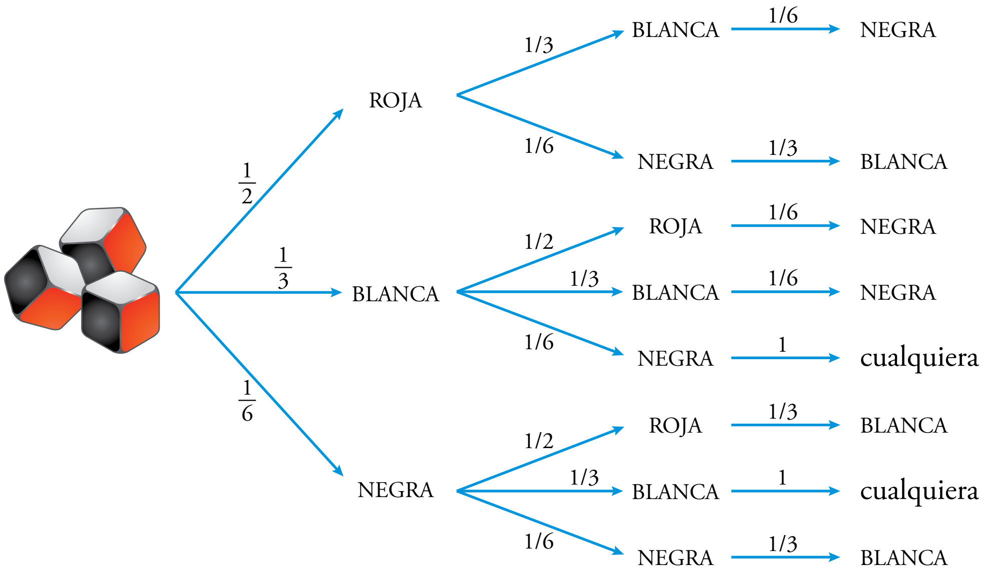
a) $P[1R \text{ y } 2V] = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{20}$

b) $P[R, A, V] = 6 \cdot P[1.^{a}\ R, 2.^{a}\ A, 3.^{a}\ V] = 6 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

2. Cálculo de probabilidades. Diagrama en árbol

Hazlo tú. Un dado tiene 3 caras rojas, 2 blancas y 1 negra. Lanzamos tres dados con esas características. ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna cara blanca y alguna negra?

Construimos un diagrama en árbol:



$$P[\text{alguna blanca y alguna negra}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

3. Distribución de probabilidad de variable discreta

Hazlo tú. En un dado irregular,

$$P[1] = P[2] = P[3] = 0{,}1 \quad \text{y} \quad P[4] = P[5] = 0{,}2$$

Averigua $P[6]$ y el valor de μ y σ.

$P[6] = 1 - P[1] - P[2] - P[3] - P[4] - P[5] = 1 - 3 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}3$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,4
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
5	0,2	1	5
6	0,3	1,8	10,8
TOTAL	1	4,2	20,4

$\mu = 4{,}2$

$\sigma = \sqrt{20{,}4 - 4{,}2^2} = 1{,}66$

Página 253

4. Distribución binomial

Hazlo tú. Si Alberto tuviera una probabilidad de 0,93 de encestar un triple, ¿qué probabilidad tendría de ganar a Raquel?

Se trata de una binomial $B(15; 0{,}93)$.

$P[x > 13] = P[x = 14] + P[x = 15]$

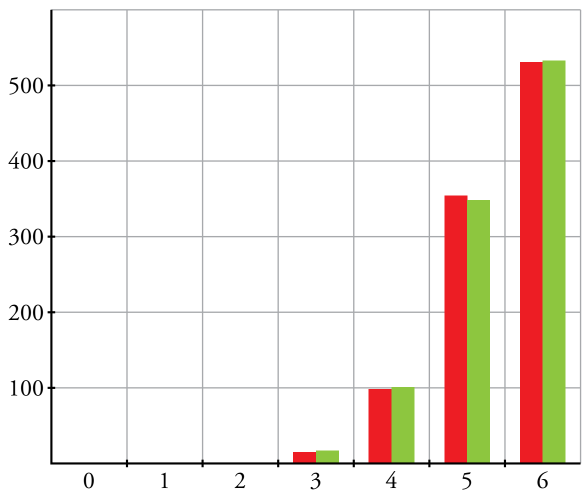
$P[x = 14] = \binom{15}{14} \cdot 0{,}93^{14} \cdot 0{,}07 = 0{,}0253$

$P[x = 15] = 0{,}93^{15} = 0{,}3367$

$P[x > 13] = P[x = 14] + P[x = 15] = 0{,}0253 + 0{,}3367 = 0{,}36$

5. Ajuste a una binomial

Hazlo tú. Dibuja en rojo el diagrama de barras con los valores empíricos (observados) y en verde, sobre el anterior, el diagrama de barras con los valores teóricos.



Ejercicios y problemas guiados

Página 254

1. Cálculo de probabilidades y distribución de probabilidad

En una urna hay 12 bolas blancas, 8 rojas, 3 verdes y 1 amarilla. Se toman tres bolas al azar y se anota el número de ellas que son blancas.

a) Hacer una tabla con la distribución de probabilidad.

b) ¿La distribución de probabilidad anterior nos permite calcular la probabilidad de que las tres bolas extraídas sean verdes? ¿Por qué?

c) Calcular la probabilidad de que al menos dos bolas sean blancas.

a) $P[0 \text{ BLANCAS}] = \frac{12}{24} \cdot \frac{11}{23} \cdot \frac{10}{22} = \frac{5}{46}$

$P[1 \text{ BLANCA}] = \frac{12}{24} \cdot \frac{12}{23} \cdot \frac{11}{22} + \frac{12}{24} \cdot \frac{12}{23} \cdot \frac{11}{22} + \frac{12}{24} \cdot \frac{11}{23} \cdot \frac{12}{22} = \frac{9}{23}$

$P[2 \text{ BLANCAS}] = 3 \cdot \frac{12}{24} \cdot \frac{12}{23} \cdot \frac{11}{22} = \frac{9}{23}$

$P[3 \text{ BLANCAS}] = \frac{12}{24} \cdot \frac{11}{23} \cdot \frac{10}{22} = \frac{5}{46}$

b) No, porque solo tenemos conocimiento de si la bola es blanca o no.

c) $P[\text{al menos dos sean BLANCAS}] = P[2 \text{ BLANCAS}] + P[3 \text{ BLANCAS}] = \frac{9}{23} + \frac{5}{46} = \frac{1}{2}$

2. Binomial

Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente 4 preguntas?

b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?

c) Calcular la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta.

Es binomial: Se repite 10 veces la misma experiencia, que es contestar una pregunta. Es independiente porque todas las preguntas tienen el mismo número de respuestas posibles y se responden al azar.

$x \to$ número de respuestas acertadas.

Es una binomial $n = 10,\ p = \frac{1}{4} \to B(10, 1/4)$

a) $P[x = 4] = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0{,}146$

b) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2])$

$P[x = 0] = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}0563$

$P[x = 1] = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^9 = 0{,}18771$

$P[x = 2] = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0{,}28157$

$P[x > 2] = 1 - (0{,}0563 + 0{,}18771 + 0{,}28157) = 0{,}47$

c) $P[x \le 9] = 1 - P[x = 10]$

$$P[x = 10] = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 0{,}000000953$$

$P[x \le 9] = 1 - 0{,}000000953 = 0{,}999999046$

3. Binomial

En una familia con 6 hijos, ¿cuál de estas dos opciones es más probable?

- ***Que haya tantas chicas como chicos.***
- ***Que haya más chicas que chicos.***

$x \rightarrow$ número de chicas

a) Tantas chicas como chicos $\rightarrow P[x = 3] = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{5}{16}$

b) Más chicas que chicos $\rightarrow P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6]$

$$P[x = 4] = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{15}{64}$$

$$P[x = 5] = \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$$

$$P[x = 6] = \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{1}{64}$$

$$P[x > 3] = \frac{15}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 255

Para practicar

Cálculo de probabilidades

1 Lanzamos tres monedas. Calcula la probabilidad de que:

a) Las tres sean cara.

b) Se obtengan dos caras y una cruz.

c) Haya al menos una cara.

a) $P[\text{3 caras}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P[\text{2 caras y 1 cruz}] = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

c) $P[\text{al menos 1 cara}] = 1 - P[\text{3 cruces}] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

2 a) En un juego de dominó, tenemos sobre la mesa la ficha 3-5. ¿Qué probabilidad hay de que otra extraída al azar engrane con ella?

b) ¿Y si tuviésemos la 5-5?

a) Sin contar la que está sobre la mesa, hay 6 fichas más con un 3 y 6 fichas más con un 5 y quedan 27 fichas.

$P[\text{salga 3 o 5}] = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

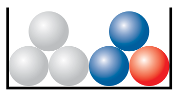
b) $P[\text{salga 5}] = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

3 Extraemos tres bolas con reemplazamiento de esta urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Cada una sea de un color.

b) No haya ninguna blanca.

c) Se obtengan dos azules.



Repite la actividad si la extracción fuera sin reemplazamiento.

Con reemplazamiento:

a) $P[R, B, A] = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{ninguna BLANCA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) $P[2A] = P[R, 2A] + P[B, 2A] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$

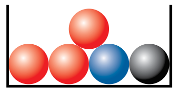
Sin reemplazamiento:

a) $P[R, B, A] = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b) $P[R, 2A] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

c) $P[2A] = P[R, 2A] + P[B, 2A] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

4 **Extraemos dos bolas de la siguiente urna:**



a) ¿Qué es más probable, sacar dos bolas ROJAS con o sin reemplazamiento?

b) ¿Qué es más probable, sacar una bola ROJA y otra AZUL con o sin reemplazamiento?

a) Con reemplazamiento: $P[2R] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36$

Sin reemplazamiento: $P[2R] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Es más probable con reemplazamiento.

b) Con reemplazamiento: $P[R, A] = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$

Sin reemplazamiento: $P[R, A] = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Es más probable sin reemplazamiento.

Distribuciones de probabilidad

5 **Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros μ y σ:**

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	…	0,1

$0{,}1 + 0{,}3 + P[2] + 0{,}1 = 1 \;\rightarrow\; P[2] = 0{,}5$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,5	1	2
3	0,1	0,3	0,9
		$\sum x_i p_i = 1{,}6$	$\sum p_i x_i^2 = 3{,}2$

$\mu = \sum x_i p_i = 1{,}6$

$\sigma = \sqrt{3{,}2 - 1{,}6^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

6 **En una urna hay diez bolas con los números 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6. Sacamos una bola y anotamos el resultado. Elabora la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.**

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	0,20	0,20	0,20
2	0,10	0,20	0,40
3	0,30	0,90	2,70
4	0,10	0,40	1,60
5	0,20	1,00	5,00
6	0,10	0,60	3,60
TOTAL	1	3,50	13,50

$\mu = 3{,}5$

$\sigma = \sqrt{13{,}5 - 3{,}5^2} = 1{,}12$

7 **Tenemos dos monedas, una correcta y otra defectuosa en la que la probabilidad de obtener cruz es 0,2. Las lanzamos y anotamos el número de cruces.**

Haz una tabla con la distribución de probabilidad y halla la probabilidad de obtener al menos una cruz.

$x \rightarrow$ número de cruces

$P[x = 0] = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$

$P[x = 1] = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,5$

$P[x = 2] = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$

$P[x \geq 1] = P[x = 1] + P[x = 2] = 0,5 + 0,1 = 0,6$

x_i	p_i
0	0,4
1	0,5
2	0,1

8 **Extraemos con reemplazamiento dos cartas de una baraja y anotamos el número de ASES.**

a) ¿Cuáles son los posibles resultados?

b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

c) Calcula la media y la desviación típica.

a) $x \rightarrow$ número de ases

$x = 0, 1, 2$

b) $P[x = 0] = \frac{36}{40} \cdot \frac{36}{40} = \frac{81}{100} = 0,81$

$P[x = 1] = 2 \cdot \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{36}{40}\right) = \frac{9}{50} = 0,18$

$P[x = 2] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = 0,01$

c) $\mu = 0,2$

$\sigma = \sqrt{0,22 - 0,2^2} = 0,42$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,81	0,00	0,00
1	0,18	0,18	0,18
2	0,01	0,02	0,04
TOTAL	1	0,20	0,22

Distribución binomial

9 **Reconoce en cada uno de los siguientes casos una distribución binomial y di los valores de n, p, q, μ y σ.**

- **Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que solo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?**
- **En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. Nos preguntamos cuántas de ellas acertará.**
- **Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.**
- **El 11 % de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio, aunque sea el reintegro. En un familia juegan a 46 números. ¿En cuántos se obtendrá premio?**
- **El 1 % de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que hay.**

- $B\left(50; \frac{1}{3}\right)$; $\mu = \frac{50}{3} = 16,67$; $\sigma = 3,33$
- $B\left(30; \frac{1}{3}\right)$; $\mu = 10$; $\sigma = 2,58$ relativo a las que contesta al azar.
- $B\left(400; \frac{1}{2}\right)$; $\mu = 200$; $\sigma = 10$
- $B(46; 0,11)$; $\mu = 5,06$; $\sigma = 2,12$
- $B(1\,000; 0,01)$; $\mu = 10$; $\sigma = 3,15$

10 **En una distribución binomial $B(7; 0{,}4)$, determina:**

a) $P[x = 2]$ **b)** $P[x = 5]$ **c)** $P[x = 0]$

d) $P[x > 0]$ **e)** $P[x > 3]$ **f)** $P[x < 5]$

a) $\binom{7}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}261$ b) $\binom{7}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}077$

c) $0{,}6^7 = 0{,}028$ d) $1 - P[x = 0] = 0{,}972$

e) 0,290 f) 0,904

11 **En una distribución binomial $B(9; 0{,}2)$, calcula:**

a) $P[x < 3]$ **b)** $P[x \geq 7]$ **c)** $P[x = 0]$

d) $P[x \neq 0]$ **e)** $P[x \leq 9]$ **f)** $P[x \geq 9]$

a) $P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = 0{,}738$

b) $P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9] = 0{,}000314$

c) $P[x = 0] = 0{,}134$

d) $1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}134 = 0{,}866$

e) 1

f) $P[x \geq 9] = P[x = 9] + P[x > 9] = 0 + 0{,}0000005 = 0{,}0000005$

12 **Todos los jugadores de un equipo de fútbol A tienen la misma probabilidad de marcar un penalti, 0,85. Al final del partido, en la tanda de penaltis, cada equipo tira cinco, y sabemos que el equipo contrario B ha marcado tres:**

a) ¿Qué probabilidad hay de que haya ganado el equipo A tras estos cinco lanzamientos? ¿Y el B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que queden empatados y tengan que lanzar un sexto penalti?

c) Calcula la probabilidad de que el equipo A falle todos los penaltis. Halla también la de que los meta todos.

$x \to$ número de penaltis marcados por el equipo A

Es una distribución binomial $B(5; 0{,}85)$.

a) Si gana A es porque ha marcado más de 3 penaltis.

$$P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] = \binom{5}{4} 0{,}85^4 \cdot 0{,}15 + \binom{5}{5} 0{,}85^5 = 0{,}84$$

Si gana B es porque A ha marcado menos de 3 penaltis.

$$P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] =$$

$$= \binom{5}{0} 0{,}85^0 \cdot 0{,}15^5 + \binom{5}{1} 0{,}85 \cdot 0{,}15^4 + \binom{5}{2} 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^3 = 0{,}0266$$

b) $P[x = 3] = 1 - (0{,}83521 + 0{,}0266) = 0{,}14$

c) La probabilidad de que A falle todos los penaltis es $P[x = 0] = \binom{5}{0} 0{,}85^0 \cdot 0{,}15^5 = 0{,}0000759$

La probabilidad de que A acierte todos los penaltis es $P[x = 5] = \binom{5}{5} 0{,}85^5 = 0{,}44$

13 **En un almacén hay 5 aparatos de televisión antiguos. Sabemos que la probabilidad de que cualquiera de ellos tenga una deficiencia es 0,2. Calcula estas probabilidades:**

a) ***P*[ninguno defectuoso]** **b)** ***P*[al menos dos defectuosos]**

c) ***P*[alguno defectuoso]**

$x \rightarrow$ número de aparatos defectuosos; x sigue una $B(5; 0,2)$.

a) $P[\text{ninguno defectuoso}] = P[x = 0] = \binom{5}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,33$

b) $P[\text{al menos dos defectuosos}] = P[x \geq 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1]) =$

$$= 1 - \left(\binom{5}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^5 + \binom{5}{1} 0,2 \cdot 0,8^4\right) = 0,26$$

c) $P[\text{alguno defectuoso}] = P[x > 0] = 1 - (P[x = 0]) = 1 - \binom{5}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,67$

14 **En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2 % son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Halla la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:**

a) Ninguno. **b) Uno.** **c) Más de dos.**

x es $B(50; 0,02)$

a) $P[x = 0] = 0,98^{50} = 0,364$

b) $P[x = 1] = 50 \cdot 0,02 \cdot 0,98^{49} = 0,372$

c) $P[x > 2] = 1 - P[x \leq 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$$= 1 - (0,364 + 0,372 + 0,186) = 1 - 0,922 = 0,078$$

Página 256

Para resolver

15 **Antonio y María tienen dos barajas de cartas. Cada uno extrae una carta de su baraja al azar.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que sea la misma carta?

b) ¿Qué probabilidad hay de que sea el mismo número aunque tenga distinto palo?

c) ¿Qué probabilidad hay de que obtengan el mismo palo?

a) Se trata de un experimento compuesto en el que hay 40 × 40 = 1 600 casos posibles, y en 40 de ellos coinciden las dos cartas.

$P[\text{misma carta}] = \frac{40}{1600} = \frac{1}{40}$.

b) Con el mismo razonamiento del apartado a), ahora hay 160 casos favorables.

$P[\text{tengan el mismo número}] = \frac{160}{1600} = \frac{1}{10}$

c) Con el mismo razonamiento del apartado a), ahora hay 400 casos favorables.

$P[\text{mismo palo}] = \frac{400}{1600} = \frac{1}{4}$

16 **Se extrae un naipe de una baraja y luego se tira un dado. Si sale el 5 o el 6, se devuelve la carta al mazo; si no, esta se retira. Se baraja y se vuelve a extraer una carta. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos** ASES**?**

$P[2 \text{ ASES}] = P[\text{AS}] \cdot P[5, 6 \text{ y AS}] + P[\text{AS}] \cdot P[1, \ldots, 4 \text{ y AS}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{40} + \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{39} = \frac{11}{1300} = 0,0085$

17 **La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por esta tabla:**

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	a	b	c	0,2

Sabemos que $P[x \le 2] = 0{,}7$ y que $P[x \ge 2] = 0{,}75$. Halla los valores de a, b y c y calcula μ y σ.

$P[x \le 2] = 0{,}7 = 0{,}1 + a + b$

$P[x \ge 2] = 0{,}75 = b + c + 0{,}2$

$0{,}1 + a + b + c + 0{,}2 = 1$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0{,}6 \\ b+c=0{,}55 \\ a+b+c=0{,}7 \end{array}\right\} \quad a = 0{,}15; \ \ b = 0{,}45; \ \ c = 0{,}1$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i {x_i}^2$
0	0,10	0,00	0,00
1	0,15	0,15	0,15
2	0,45	0,90	1,80
3	0,10	0,30	0,90
4	0,20	0,80	3,20
TOTAL	1,00	2,15	6,05

$\mu = 2{,}15$

$\sigma = \sqrt{6{,}05 - 2{,}15^2} = 1{,}19$

18 **Una caja contiene cinco bolas con un 2, tres con un 1 y dos con un 0. Se sacan dos bolas y se suman sus números.**

a) Construye la tabla de la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.

b) Haz otra tabla suponiendo que se saca una bola al azar, se mira el número, se vuelve a meter en la caja, se repite la operación y se suman los dos números extraídos.

a) $x \longrightarrow$ suma de los números

$$P[x = 0] = P[0 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} = 0{,}02$$

$$P[x = 1] = P[0 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{15} = 0{,}13$$

$$P[x = 2] = P[0 \text{ y } 2] + P[2 \text{ y } 0] + P[1 \text{ y } 1] = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{45} = 0{,}29$$

$$P[x = 3] = P[2 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

$$P[x = 3] = P[2 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9} = 0{,}22$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i {x_i}^2$
0	0,02	0,00	0,00
1	0,13	0,13	0,13
2	0,29	0,58	1,16
3	0,33	1,00	3,00
4	0,22	0,89	3,56
TOTAL	1,00	2,60	7,84

$\mu = 2{,}6$

$\sigma = \sqrt{7{,}84 - 2{,}6^2} = 1{,}04$

b) $x \to$ suma de los números

$P[x=0] = P[0 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

$P[x=1] = P[0 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{25} = 0{,}12$

$P[x=2] = P[0 \text{ y } 2] + P[2 \text{ y } 0] + P[1 \text{ y } 1] = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{29}{100} = 0{,}29$

$P[x=3] = P[2 \text{ y } 1] + P[1 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$P[x=3] = P[2 \text{ y } 2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,04	0,00	0,00
1	0,12	0,12	0,12
2	0,29	0,58	1,16
3	0,30	0,90	2,70
4	0,25	1,00	4,00
TOTAL	1,00	2,60	7,98

$\mu = 2{,}6$

$\sigma = \sqrt{7{,}98 - 2{,}6^2} = 1{,}10$

19 **Recuerda cuáles son las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Si en cada una de ellas sumamos los puntos de sus dos mitades, obtenemos las posibles sumas 0, 1, 2, …, 10, 11 y 12 con probabilidades distintas. Haz la tabla con la distribución de probabilidades y calcula μ y σ.**

$x \to$ suma de los puntos de la ficha

Se puede conseguir:

0 puntos solo con una ficha $\to P[0] = \frac{1}{28} = 0{,}04$

1 punto con una ficha $\to P[1] = 0{,}04$

2 puntos con dos fichas distintas 2:0 y 1:1 $\to P[2] = \frac{2}{28} = 0{,}07$

Obtenemos así la siguiente tabla:

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,04	0,00	0,00
1	0,04	0,04	0,04
2	0,07	0,14	0,29
3	0,07	0,21	0,64
4	0,11	0,43	1,71
5	0,11	0,54	2,68
6	0,14	0,86	5,14
7	0,11	0,75	5,25
8	0,11	0,86	6,86
9	0,07	0,64	5,79
10	0,07	0,71	7,14
11	0,04	0,39	4,32
12	0,04	0,43	5,14
TOTAL	1,00	6,00	45,00

$\mu = 6$

$\sigma = \sqrt{45 - 6^2} = 3$

20 **Un alumno ha estudiado 12 temas de los 30 que entran en un examen. Se eligen 2 temas al azar. El alumno puede haber estudiado los dos, uno o ninguno.**

a) Haz la tabla con la distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.

b) Halla μ y σ.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos le toque un tema de los que ha estudiado?

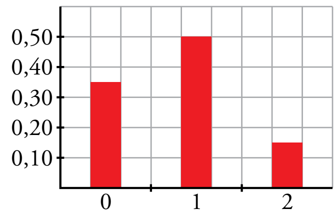
a) $x \to$ número de temas que se sabe de los dos que se han elegido.

$$P[x = 0] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145} = 0,35$$

$$P[x = 1] = 2 \cdot \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{72}{145} = 0,5$$

$$P[x = 2] = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145} = 0,15$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,35	0,00	0,00
1	0,50	0,50	0,50
2	0,15	0,30	0,60
TOTAL	1,00	0,80	1,10



b) $\mu = 0,8$

$$\sigma = \sqrt{1,1 - 0,8^2} = 0,68$$

c) $P[x = 1] + P[x = 2] = 0,35 + 0,5 = 0,85$

21 **En las familias con 4 hijos, contamos el número de niñas.**

a) Determina la distribución de probabilidad, suponiendo que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma.

b) Represéntala gráficamente.

$x \to$ número de hijas

x sigue una distribución binomial $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

$$P[x = 0] = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$P[x = 1] = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} = 0,25$$

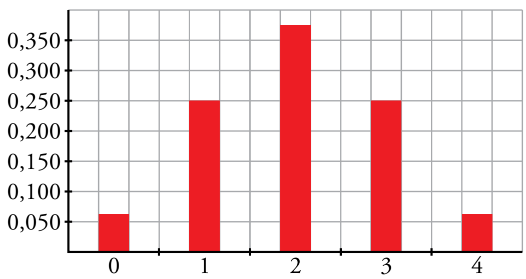
$$P[x = 2] = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$P[x = 3] = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P[x = 4] = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$$

x_i	p_i
0	0,0625
1	0,250
2	0,375
3	0,250
4	0,0625
TOTAL	1,000

b)



22 En una caja A hay cinco fichas numeradas del 1 al 5 y en otra caja B hay cuatro fichas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se saca una ficha de A, y si sale cruz, se saca de B. Se anota el número obtenido.

a) Haz la tabla de distribución de probabilidad, represéntala y calcula μ y σ.

b) ¿Qué probabilidad hay de obtener un número mayor que 6?

a) $x \to$ número obtenido

$P[x = 1] = P[\text{C y } 1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 2] = P[\text{C y } 2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 3] = P[\text{C y } 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 4] = P[\text{C y } 4] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 5] = P[\text{C y } 5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P[x = 6] = P[+ \text{ y } 6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$P[x = 7] = P[+ \text{ y } 7] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P[x = 8] = P[+ \text{ y } 8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P[x = 9] = P[+ \text{ y } 9] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	0,100	0,10	0,10
2	0,100	0,20	0,40
3	0,100	0,30	0,90
4	0,100	0,40	1,60
5	0,100	0,50	2,50
6	0,125	0,75	4,50
7	0,125	0,88	6,13
8	0,125	1,00	8,00
9	0,125	1,13	10,13
TOTAL	1,00	5,25	34,25

$\mu = 5{,}25$

$\sigma = \sqrt{34{,}25 - 5{,}25^2} = 2{,}586$

b) $P[x > 6] = P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9] = 0{,}125 \cdot 3 = 0{,}375$

23 La probabilidad de que una flecha lanzada por un arquero dé en la diana es 0,6. Si lanza 6 flechas, halla la probabilidad de que:

a) Solo una dé en la diana.

b) Al menos una dé en la diana.

c) Más de la mitad alcancen la diana.

$x \to$ número de dianas.

x sigue una distribución binomial $B(6; 0{,}6)$.

a) $P[x = 1] = \binom{6}{1} 0{,}6 \cdot 0{,}4^5 = 0{,}34$

b) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - \binom{6}{0} 0{,}4^6 = 0{,}9959$

c) $P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6] = \binom{6}{4} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 + \binom{6}{5} 0{,}6^5 \cdot 0{,}4 + \binom{6}{6} 0{,}6^6 = 0{,}54$

24 **Un tratamiento contra una enfermedad produce mejoría en 8 de cada 10 enfermos a los que se les aplica. Si se suministra a 5 enfermos, calcula la probabilidad de que:**

a) Los cinco pacientes mejoren.

b) Al menos, tres no experimenten mejoría.

$x \to$ número de enfermos que mejoran.

x sigue una distribución binomial $B(5;\ 0{,}8)$.

a) $P[x = 5] = \binom{5}{5} 0{,}8^5 = 0{,}33$

b) $P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = \binom{5}{0} 0{,}2^5 + \binom{5}{1} 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 + \binom{5}{2} 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}05792$

25 **Para controlar la calidad de un producto envasado, se eligen al azar tres envases de una caja con 50 envases. Por término medio, en cada caja hay 5 cuya calidad es deficiente.**

a) Halla la probabilidad de que, de los tres, no haya ninguno, uno o dos deficientes.

b) Si el primero resulta deficiente, ¿cuál es la probabilidad de que, de los tres, haya uno o dos deficientes?

a) $P[\text{Ningún deficiente}] = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} = 0{,}72$

$P[\text{1 deficiente}] = 3 \cdot \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0{,}25$

$P[\text{2 deficientes}] = 3 \cdot \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{45}{48} = 0{,}023$

b) Como sabemos que el primero es deficiente, la probabilidad pedida es la suma de:

- $P[\text{ninguno de los dos siguientes es deficiente}] = \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0{,}84184$
- $P[\text{de los dos siguientes uno es deficiente y el otro no}] = 2 \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{45}{48} = 0{,}15306$

La probabilidad pedida es: $0{,}84184 + 0{,}15306 = 0{,}9949$

26 **En un bombo de lotería tenemos 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se extrae una, se devuelve al bombo. Si sacamos 5 bolas, calcula la probabilidad de que:**

a) El 0 salga una sola vez.

b) Se hayan obtenido más de dos unos.

c) No se obtengan números mayores que 7.

a) $x \to$ número de ceros.

x sigue una distribución binomial $B(5;\ 0{,}1)$.

$P[x = 1] = \binom{10}{1} 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 = 0{,}39$

b) $x \to$ número de unos.

x sigue una distribución binomial $B(5;\ 0{,}1)$.

$P[x > 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$$= 1 - \left(\binom{10}{0} 0{,}9^{10} + \binom{10}{1} 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 + \binom{10}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8\right) = 0{,}0702$$

c) $P[\text{las cinco bolas sean} \le 7] = \left(\frac{8}{10}\right)^5 = 0{,}33$

27 **Para probar la eficacia de una vacuna, se administró una dosis a 100 grupos de 4 hermanos con riesgo de contagio, y los resultados observados fueron los de la tabla.**

N.° DE CONTAGIADOS	N.° DE GRUPOS
0	**36**
1	**14**
2	**8**
3	**16**
4	**26**
TOTAL	**100**

a) ¿Podemos suponer que sigue una distribución binomial? Compruébalo.

b) Dibuja en rojo el diagrama de barras con los valores empíricos (observados) y en verde, sobre el anterior, el diagrama de barras con los valores teóricos.

x_i	NÚMEROS OBSERVADOS	$f_i x_i$	p_i	$100 \cdot p_i$	NÚMEROS TEÓRICOS	DIFERENCIAS
0	36	0	0,09	8,80	9	–27
1	14	14	0,29	29,00	29	15
2	8	16	0,37	37,00	37	29
3	16	48	0,21	21,00	21	5
4	26	104	0,04	4,30	4	–22
TOTAL	100	182	1,00	100,10	100	

$\overline{x} = 1,82$

$4p = 1,82 \rightarrow p = \dfrac{1,82}{4} = 0,455, \quad q = 1 - 0,455 = 0,545$

Si x sigue una distribución binomial, sería $B(4; 0,455)$.

$P[x = 0] = \binom{4}{0} (0,545)^4 = 0,09$

$P[x = 1] = \binom{4}{1} 0,455 \cdot 0,545^3 = 0,29$

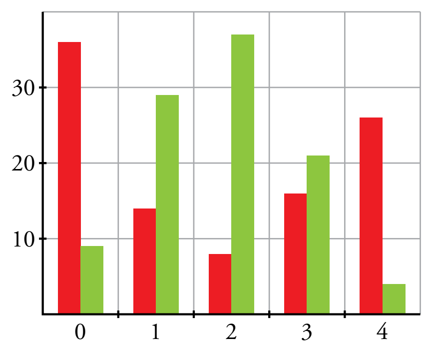
$P[x = 2] = \binom{4}{2} 0,455^2 \cdot 0,545^2 = 0,37$

$P[x = 3] = \binom{4}{3} 0,455^3 \cdot 0,545 = 0,21$

$P[x = 4] = \binom{4}{4} 0,455^4 = 0,04$

a) No sigue una distribución binomial porque las diferencias entre los valores observados y los teóricos son muy grandes.

b)



Página 257

Cuestiones teóricas

28 **a) En una distribución $B(4; 0{,}5)$ comprueba esta igualdad: $P[x = 1] = P[x = 3]$**

b) En una distribución $B(n, p)$ se cumple lo siguiente: $P[x = k] = P[x = n - k]$. ¿Cuánto vale p?

a) $P[x = 1] = \binom{4}{1} 0{,}5^3 \cdot 0{,}5$

$P[x = 3] = \binom{4}{3} 0{,}5 \cdot 0{,}5^3$

Como $\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$, las dos expresiones son iguales.

b) $P[x = k] = P[x = n - k]$

$\binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{n-k} p^{n-k} \cdot q^k$

Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \to p^k \cdot q^{n-k} = p^{n-k} \cdot q^k$

Significa que $p = q$, puesto que intercambian los exponentes y el resultado es el mismo.

Por tanto, $p = 1 - p \to p = \frac{1}{2}$

29 **Un ajedrecista se enfrenta a otro de igual maestría. ¿Qué es más probable, que gane dos partidas de cuatro o que gane tres de seis partidas? (Las tablas no se consideran).**

La probabilidad de que el ajedrecista gane a su contrincante es de $\frac{1}{2}$.

- Si juegan 4 partidas:

  Es una binomial $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Así:

  $P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

- Si juegan 6 partidas:

  Es una binomial $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$. Así:

  $P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{5}{16}$

Como $\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$, tenemos que es más fácil ganar 2 de 4 partidas que 3 de 6.

30 **En una mano de póquer se dan 5 cartas a cada jugador. Nos preguntamos por la probabilidad de que un jugador tenga k figuras ($k = 0, 1, 2, 3, 4$ o 5). ¿Por qué no es una distribución binomial?**

$P[1 \text{ FIGURA}] = 5 \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{28}{39} \cdot \frac{27}{38} \cdot \frac{26}{37} \cdot \frac{25}{36} = 0{,}373$

$P[2 \text{ FIGURAS}] = \binom{5}{2} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{28}{38} \cdot \frac{27}{37} \cdot \frac{26}{36} = 0{,}329$

$P[3 \text{ FIGURAS}] = \binom{5}{3} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{28}{37} \cdot \frac{27}{36} = 0{,}126$

$P[4\ \text{FIGURAS}] = \binom{5}{4} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{9}{37} \cdot \frac{28}{36} = 0{,}021$

$P[5\ \text{FIGURAS}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{9}{37} \cdot \frac{8}{36} = 0{,}012$

No es una distribución binomial porque cada extracción influye en las siguientes por no haber reemplazamiento. Por tanto, las sucesivas extracciones no son independientes.

31 Sabemos que n es par, que X sigue una $B(n; 0,5)$ y que Y sigue una $B(n + 1; 0,5)$. Determina cuál de las siguientes probabilidades es mayor: $P[x = n/2]$ o $P[y = n/2]$.

$$I:\ P\left[x = \frac{n}{2}\right] = \binom{n}{\frac{n}{2}} 0,5^{\frac{n}{2}} \cdot 0,5^{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} 0,5^{n}$$

$$II:\ P\left[y = \frac{n}{2}\right] = \binom{n+1}{\frac{n}{2}} 0,5^{\frac{n}{2}} \cdot 0,5^{n+1-\frac{n}{2}} = \binom{n+1}{\frac{n}{2}} 0,5^{n+1}$$

$\binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{k}$, para cualquier $k = 0, \ldots, n$ distinto de $\frac{n}{2}$.

Por otra parte, $\binom{n+1}{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} < 2 \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}$

Volvemos a la expresión II.

$$P\left[y = \frac{n}{2}\right] = \binom{n+1}{\frac{n}{2}} 0,5^{n+1} = \left(\binom{n}{\frac{n}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\right) 0,5^{n+1} < 2 \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0,5 \cdot 0,5^{n} = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0,5^{n} = P\left[x = \frac{n}{2}\right]$$

Por tanto, es mayor $P\left[x = \frac{n}{2}\right]$.

32 ¿Verdadero o falso?

a) La distribución binomial $B(7; 0,2)$ es una distribución de probabilidad cuya variable solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

b) Sabemos que el 20 % de los jóvenes utiliza una cierta red social. En un aula hay 30 jóvenes. La probabilidad de que el 10 % de ellos utilice esa red es $\binom{30}{10} \cdot 0,2^{10} \cdot 0,8^{20}$.

a) Verdadero, el número de éxitos está entre 0 y 7 veces que se repite la experiencia.

b) Falso, el 10 % de 30 es 3, luego la probabilidad pedida es:

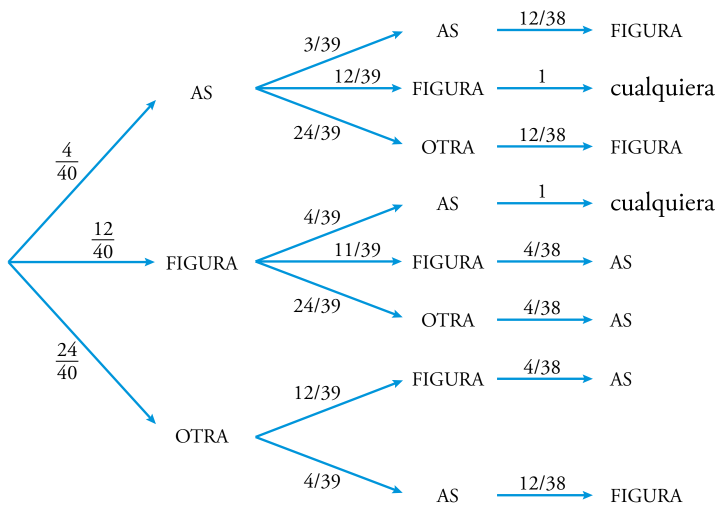
$P[x = 3] = \binom{30}{3} \cdot 0,2^{3} \cdot 0,8^{27}$

Para profundizar

33 **a) Extraemos tres cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Qué probabilidad hay de obtener algún AS y alguna FIGURAS? (FIGURAS: SOTA, CABALLO y REY)**

b) Extraemos dos cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna FIGURA y algún OROS? (*FIGURA de OROS vale como FIGURA y como OROS*).

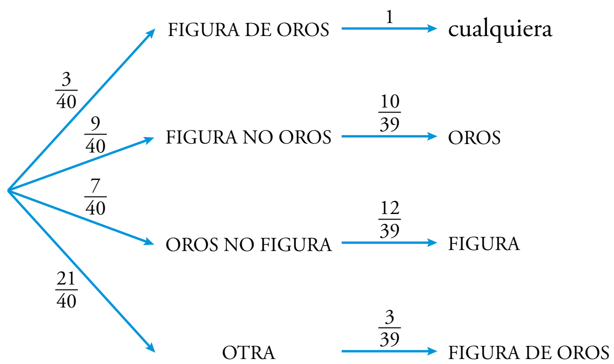
a) Utilizando el siguiente diagrama,



obtenemos la probabilidad pedida:

$$\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{12}{38}+\frac{4}{40}\cdot\frac{12}{39}\cdot 1+\frac{4}{40}\cdot\frac{24}{39}\cdot\frac{12}{38}+\frac{12}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot 1+\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{4}{38}+\frac{12}{40}\cdot\frac{24}{39}\cdot\frac{4}{38}+\frac{24}{40} = 0{,}15$$

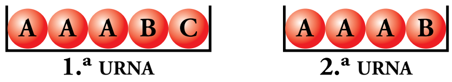
b) Utilizando el siguiente diagrama.



obtenemos la probabilidad pedida:

$$\frac{3}{40}+\frac{9}{40}\cdot\frac{10}{39}+\frac{7}{40}\cdot\frac{12}{39}+\frac{21}{40}\cdot\frac{3}{39} = 0{,}23$$

34 **Extraemos una bola de la primera urna y la introducimos en la segunda. Luego sacamos una bola de la segunda urna.**



a) ¿Qué probabilidad hay de obtener C en la segunda extracción?

b) Calcula: *P*[1.ª B y 2.ª B]; *P*[1.ª C y 2.ª B]

c) Calcula: *P*[1.ª A y 2.ª A]; *P*[1.ª B y 2.ª A];
_P_[1.ª C y 2.ª A] y, en consecuencia, *P*[2.ª A].

a) La única forma de sacar C en la segunda extracción es: sacar C en la primera extracción y sacar C en la segunda extracción. Si hemos sacado C en la primera extracción, la composición de la urna B es 3A, 1B, 1C.

P[C en la 2.ª extracción] =

= P[C en la 1.ª extracción] · P[C en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción] = $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}04$

b) P[1.ª B y 2.ª B] = P[B en la 1.ª extracción] · P[B en la 2.ª extracción/ B en la 1.ª extracción] =

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}08$

P[1.ª C y 2.ª B] = P[C en la 1.ª extracción] · P[B en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción] =

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}04$

c) P[1.ª A y 2.ª A] =

= P[A en la 1.ª extracción] · P[A en la 2.ª extracción/ A en la 1.ª extracción] = $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}48$

P[1.ª B y 2.ª A] = P[B en la 1.ª extracción] · P[A en la 2.ª extracción/ B en la 1.ª extracción] =

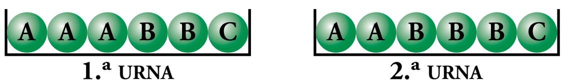
$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}12$

P[1.ª C y 2.ª A] = P[C en la 1.ª extracción] · P[A en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción] =

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}12$

P[2.ª A] = P[1.ª A y 2.ª A] + P[1.ª B y 2.ª A] + P[1.ª C y 2.ª A] = 0,48 + 0,12 + 0,12 = 0,72

35 **Extraemos una bola de la primera urna y la introducimos en la segunda urna. Luego sacamos una bola de la segunda.**



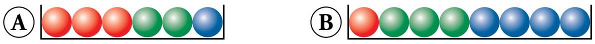
¿Cuál es la probabilidad de obtener A de la segunda urna?

Seguimos el mismo razonamiento que en el apartado c) anterior.

P[2.ª A] = P[1.ª A y 2.ª A] + P[1.ª B y 2.ª A] + P[1.ª C y 2.ª A] = $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} = 0{,}36$

Autoevaluación

1 Tiramos un dado. Si sale 5 o 6, extraemos una bola de la urna A y si no, la extraemos de la urna B.



a) ¿Qué probabilidad hay de obtener un 5 o un 6 y extraer una bola roja?

b) ¿Qué probabilidad hay de obtener 4 y bola verde?

a) Si sale 5 o 6 extraemos la bola de la urna A, luego la probabilidad de extraer bola roja en ambos casos es $\frac{3}{6}$.

$$P[5 \text{ y ROJA}] + P[6 \text{ y ROJA}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = 0{,}17$$

b) Si sale 4 extraemos la bola de la urna B, luego la probabilidad de extraer bola verde en este caso es $\frac{3}{8}$.

$$P[4 \text{ y VERDE}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = 0{,}0625$$

2 Completa esta tabla de distribución de probabilidad:

x_i	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	…

Halla μ y σ.

$$P[10] = 1 - (0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
5	0,1	0,5	2,5
6	0,3	1,8	10,8
7	0,2	1,4	9,8
8	0,1	0,8	6,4
9	0,1	0,9	8,1
10	0,2	2	20
	1,00	7,4	57,6

$\mu = 7{,}4$

$\sigma = \sqrt{57{,}6 - 7{,}4^2} = 1{,}69$

3 Tenemos dos fichas: A, con un 1 en una cara y un 2 en la otra; y B, con un 2 en una cara y un 3 en la otra.

a) Lanzamos las dos fichas y sumamos sus valores. Los posibles resultados son 3, 4 y 5. Elabora la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.

b) Lanzamos seis veces las dos fichas. ¿Qué probabilidad hay de obtener 5 en tres ocasiones? ¿Y en más de tres?

a) $P[3] = P[1A \text{ y } 2B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25$

$$P[4] = P[1A \text{ y } 3B] + P[2A \text{ y } 2B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P[5] = P[2A \text{ y } 3B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25$$

La tabla de la distribución es:

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
3	0,25	0,75	2,25
4	0,50	2,00	8,00
5	0,25	1,25	6,25
TOTAL	1,00	4,00	16,50

$\mu = 4$

$\sigma = \sqrt{16,5 - 4^2} = 0,70711$

b) $x \to$ número de cincos en 6 lanzamientos.

x sigue una binomial $B(6; 0,25)$.

La probabilidad de obtener 5 en tres ocasiones es:

$$P[x = 3] = \binom{6}{3} 0,25^3 \cdot 0,75^3 = 0,132$$

La probabilidad de obtener 5 en más de tres ocasiones es:

$$P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6] = \binom{6}{4} 0,25^4 \cdot 0,75^2 + \binom{6}{5} 0,25^5 + 0,75 + \binom{6}{6} 0,25^6 = 0,0376$$

4 **En una binomial $B(5, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[x = 5]$ **b) $P[x < 5]$** **c) $P[x > 3]$**

a) $P[x = 5] = \binom{5}{5} 1^5 = 1$

b) $P[x < 5] = 1 - P[x = 5] = 1 - 1 = 0$

c) $P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] = 1$

5 **Eva es saltadora de longitud, y en el 80 % de sus saltos consigue superar los 6 m. Sabiendo que en una competición tiene que saltar cuatro veces, halla la probabilidad de que:**

a) En todas supere los 6 m.

b) No los supere en ninguna.

c) Al menos lo haga en dos ocasiones.

d) Si su primer salto fue nulo, supere los 6 m en, al menos, una ocasión.

$x \to$ número de veces que supera los 6 m.

x sigue una binomial $B(4; 0,8)$.

a) $P[x = 4] = \binom{4}{4} 0,8^4 = 0,41$

b) $P[x = 0] = \binom{4}{0} 0,2^4 = 0,0016$

c) $P[x \ge 2] = P[x = 2] + P[x = 3] + P[x = 4] = \binom{4}{2} 0,8^2 \cdot 0,2^2 + \binom{4}{3} 0,8^3 \cdot 0,2 + \binom{4}{4} 0,8^4 = 0,97$

d) $x \to$ número de veces que supera los 6 m en los 3 saltos restantes.

x sigue una binomial $B(3; 0,8)$.

$$P[x \ge 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - \binom{3}{0} 0,2^3 = 0,99$$

6 **En un puesto de una feria, por un tique te dejan tirar 6 veces a una canasta. Si cuelas al menos dos tiros, te llevas premio. Se supone que cada persona tiene una probabilidad de 0,15 de hacer canasta en cada tiro.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que una persona gane un premio con un tique?

b) Si juegan 1 000 personas a lo largo de la semana, ¿cuántos, aproximadamente, se llevarán el premio?

$x \to$ número de veces que encestas.

x sigue una binomial $B(6; 0{,}15)$.

a) $P[x \geq 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1]) = 1 - \left(\binom{6}{0} 0{,}85^6 + \binom{6}{1} 0{,}15 \cdot 0{,}85^5\right) = 1 - 0{,}77648 = 0{,}224$

b) Si hay 1 000 personas, aproximadamente $1\,000 \cdot 0{,}224 = 224$ personas se llevarán el premio.